Ερώτημα: Αν έχουμε $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x_0\in[a,b]$ και η f n-φορές παραγωγίσιμη. Να βρεθεί ένα πολυώνυμο βαθμού έως n, ώστε $p(x_0)=f(x_0)$, $p'(x_0)=f'(x_0),\dots,p^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$. (Δηλαδή, $p^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)$, $k=0,1,\dots,n$)

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, υπάρχει ένα ακριβώς πολυώνυμο με την ιδιότητα και είναι το:

$$p(x)=b_n(x-x_0)^n+b_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+\dots+b_1(x-x_0)+b_0 \text{ όπου}$$

$$b_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad k=0,1,\dots,n.$$

Άρα, το πολυώνυμο στο οποίο αναφερθήκαμε είναι το:

$$\underbrace{T_{n,f,x_0}(x)}_{\text{εξαρτάται από το } n, \text{ την } f, \text{ το σημείο } x_0}=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Καλείται πολυώνυμο Taylor τάξης n της συνάρτησης f στο σημείο x_0.

Θέτουμε $R_{n,f,x_0}(x)=f(x)-T_{n,f,x_0}(x)$ υπόλοιπο Taylor τάξης n της f στο x_0.

[Στην περίπτωση που $x_0=0$

$$T_{n,f,0}(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

λέγεται πολυώνυμο McLauren τάξης n.]

Παρατήρηση: Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και n φορές παραγωγίσιμη στο x_0.

$$T_{n,f,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$T'_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k (x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} (x-x_0)^{k-1} =$$

Θέτοντας $k-1=s$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{f^{(s+1)}(x_0)}{s!} (x-x_0)^{s} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(f')^{(s)}(x_0)}{s!} (x-x_0)^{s} =$$

$$= T_{n-1,f',x_0}(x)$$

Έτσι, δείξαμε ότι $T'_{n,f,x_0}(x) = T_{n-1,f',x_0}(x)$.

Επίσης, $R'_{n,f,x_0} = f' + T_{n-1,f',x_0} = R_{n-1,f',x_0}$.

<u>Παραδείγματα</u>:

α) $f(x)=e^x$ $\qquad T_{n,f,0}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$

$f'(x)=e^x$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = e^x \ \forall k \in \mathbb{N}$

$f^{(k)}(0) = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$

β) $f(x)=\sin x$ $\qquad$ Με επαγωγή δείχνουμε πως $\forall n \in \mathbb{N}$:

$f'(x)=\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

$f'''(x)=-\cos x$

$f^{(4)}(x)=\sin x$

$$\left\{\begin{array}{l} f^{(4n)}(x)=\sin x \\ f^{(4n+1)}(x)=\cos x \\ f^{(4n+2)}(x)=-\sin x \\ f^{(4n+3)}(x)=-\cos x \end{array}\right\}$$

Άρα, $f^{(4n)}(0)=0$

$f^{(4n+1)}(0)=1$

$f^{(4n+2)}(0)=0$

$f^{(4n+3)}(0)=-1$

$$T_{2n+1,f,0}(x) = 1\cdot x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$\parallel$$

$$= T_{2n+2,f,0}(x)$$

γ) $f(x)=\cos x$
$f'(x)=-\sin x$
$f''(x)=-\cos x$
$f'''(x)=\sin x$
$f^{(4)}(x)=\cos x$

$$\begin{cases} f^{(4n)}(x)=\cos x \\ f^{(4n+1)}(x)=-\sin x \\ f^{(4n+2)}(x)=-\cos x \\ f^{(4n+3)}(x)=\sin x \end{cases} \quad \begin{cases} f^{(4n)}(0)=1 \\ f^{(4n+1)}(0)=0 \\ f^{(4n+2)}(0)=-1 \\ f^{(4n+3)}(0)=0 \end{cases}$$

$$T_{2n,f,0}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\dots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=$$
$$\parallel$$
$$T_{2n+1,f,0}(x).$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x_0\in[a,b]$.
f $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$,
και n φορές παραγωγίσιμη στο x_0.
Τότε, το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f στο x_0, δηλαδή το $T_{n,f,x_0}(x)$, είναι το μοναδικό πολυώνυμο $T(x)$ βαθμού $\leq n$, για το οποίο ισχύει: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T(x)}{(x-x_0)^n}=0$.

<u>Λήμμα 1</u>: Έστω $f(x_0)$ όπως πριν. Τότε, $\lim_{x\to x_0}\frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=0$.

<u>Απόδειξη</u>: (Με επαγωγή στο n.)

<u>1ο επαγωγικό βήμα</u>: (για $n=1$)

$$R_{1,f,x_0}(x)=f(x)-\left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0).$$

$$\frac{R_{1,f,x_0}(x)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0).$$

Παίρνοντας όριο για $x\to x_0$ από τον ορισμό της παραγ.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_{1,f,x_0}(x)}{x-x_0}=f'(x_0)-f'(x_0)=0.$$

Γενικό επαγωγικό βήμα:

Υποθέτουμε ότι το λήμμα ισχύει για $n=m$ για κάθε πολυώνυμο που ικανοποιεί τις υποθέσεις.

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

m φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και

$m+1$ φορές παραγωγίσιμη στο x_0.

Τότε, $\lim\limits_{x\to x_0} R_{m+1,f,x_0}(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^{m+1}=0$

και $$\lim_{x\to x_0}\frac{R_{m+1,f,x_0}(x)}{((x-x_0)^{m+1})'}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_{m,f',x_0}(x)}{(m+1)(x-x_0)^m}=0$$

Από θεώρημα De L'Hospital προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_{m+1,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^{m+1}}=0$

Λήμμα 2: Έστω $P(x)$ πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ ώστε να ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{(x-x_0)^n}=0$. Τότε, $P(x)=0$ (μηδενικό πολυώνυμο).

Απόδειξη: (με επαγωγή)

Για $n=0$ προφανές.

Έστω $n\geq 1$. $P(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{(x-x_0)^n}(x-x_0)^n=0$

Άρα, $P(x)=(x-x_0)\Pi(x)$, για κάποιο πολυώνυμο $\Pi(x)$.

Τότε, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\Pi(x)}{(x-x_0)^{n-1}}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{(x-x_0)^n}=0$

Από επαγωγική υπόθεση $\Pi(x)=0$. Άρα, $P(x)=0$.

Απόδειξη: (του θεωρήματος)

Από το λήμμα 1 και το λήμμα 2 ικανοποιεί την $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-T(x)}{(x-x_0)^n}=0$ (I)

Για τη μοναδικότητα:

Αν $T_1(x), T_2(x)$ δύο πολυώνυμα που ικανοποιούν την (I), τότε

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{T_1(x)-T_2(x)}{(x-x_0)^n}=0$. Από το λήμμα 2, το πολυώνυμο $T_1(x)-T_2(x)$ προκύπτει ότι είναι το μηδενικό.

Δηλαδή, $T_1(x)-T_2(x)=0 \Rightarrow T_1(x)=T_2(x)$.